МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
«УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ»

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ ТА ОБ'ЄКТІВ»

ХАРКІВ 2025

ЗМІСТ

Вступ 4

1 Рекомендації щодо організації самостійної роботи з дисципліни «Комп’ютерне моделювання електричних систем та об’єктів» 5

2 Ідентифікація об’єкту дослідження за даними спостережень 8

3 Інтерполяція та апроксимація даних 22

4 Застосування методів математичного програмування для вирішенні задач планування 32

5 Застосування аналітичного моделювання при дослідженні властивостей мереж Петрі 37

6 Складання та реалізація алгоритму дослідження мережі масового обслуговування імітаційними методами 39

7 Складання та реалізація алгоритму дослідження мережі Петрі імітаційними методами 42

8 Планування та проведення експерименту за допомогою імітаційної моделі 43

Список джерел інформації 43

ВСТУП

Сучасні методи моделювання, з огляду на їх ефективний розвиток, мають досить великий вплив на проведення наукових досліджень як здобувачами вищої освіти, так і науковцями в цілому. Саме моделювання вважається найбільш сучасний і ефективний спосіб виконання досліджень в різних сферах науки як на етапах розробки моделей, так і в подальшому їх застосуванні, та його можливості постійно оновлюються з розвитком інформаційних методів та технологій.

Побудова моделей вимагає від науковців застосування, окрім значних теоретичних знань з математичних та технічних дисциплін, саме творчого підходу до розв’язку складних завдань та умінню генерувати свої знання в процесі дослідження різноманітних об’єктів.

Застосування сучасних інформаційних технологій моделювання дозволяє полегшити і прискорити процеси побудови і дослідження моделей як аналогів реальних об’єктів, процесів і явищ та можливість ефективного сприйняття інформації, яка отримується від експертів в різних галузях. Однією з найбільш значущих переваг їх застосування є можливість використання великих масивів даних, що зростають з кожним роком. За допомогою штучного інтелекту, нейронних мереж та інших методів машинного навчання науковці можуть ефективно використовувати ці дані для прогнозування та виявлення нових закономірностей.

Дані методичні вказівки дозволять систематизувати знання з методології та інструментарію сучасних методів моделювання та опанувати практичними навичками із їх застосування при побудові та дослідженні моделей.

В методичних вказівках з дисципліни «Комп’ютерне моделювання електричних систем та об’єктів» наведено рекомендації щодо організації самостійної роботи із зазначенням завдань та прикладів їх реалізації, основні вимоги до змісту звітів та питання до самоконтролю.

1 РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ «КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ ТА ОБ'ЄКТІВ»

Самостійна робота здобувача вищої освіти є формою організації індивідуального вивчення навчального матеріалу в аудиторний та у вільний час, яка сприятиме формуванню самостійності як особистої риси та професійної якості здобувача вищої освіти з огляду на систематизацію, планування, контроль та регулювання своєї діяльності без допомоги та контролю викладача.

Метою викладання навчальної дисципліни «Комп'ютерне моделювання електричних систем та об'єктів» є формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різноманітних математичних моделей під час проведення навчального дослідження здобувачів вищої освіти.

Основні завдання вивчення дисципліни:

1. Ознайомлення здобувачів вищої освіти з основними класами і принципами побудови моделей, методами комп'ютерного моделювання електричних систем та об'єктів, методами та етапами їх формалізації та алгоритмізації.

2. Формування знань про сучасні методи комп'ютерного моделювання електричних систем та об'єктів у пакетах прикладних програм моделювання, зокрема MATLAB, Simulink.

3. Розвиток умінь вибору та використання методів комп'ютерного моделювання і інструментів для створення математичних та віртуальних моделей при проєктуванні та експлуатації електричних систем та об'єктів, розробки схеми алгоритмів для їх дослідження.

4. Формування вміння застосовувати одну або декілька систем комп'ютерного моделювання, проєктування, мов програмування.

5. Розвиток практичних навичок здійснювати самостійно проєктну діяльність шляхом комп'ютерного математичного моделювання електричних систем та об'єктів у програмному середовищі MATLAB, пакету Simulink та його

пакету розширення Specialized Power Systems, яке дозволяє моделювати виробничі ситуації, аналізувати наявні види інформації та виробляти оптимальні рекомендації щодо дій, які забезпечують найефективніше досягнення мети.

6. Формування професійних компетентностей для ухвалення рішень за результатами комп'ютерного моделювання електричних систем та об'єктів для подальшої їх реалізації у виробництво при створенні нових систем та об'єктів.

7. Обізнаність про сучасний стан і перспективи розвитку електричних систем та об'єктів електроенергетики та сучасних пакетів прикладних програм.

Під час опанування дисципліни «Комп'ютерне моделювання електричних систем та об'єктів» здобувач вищої освіти повинен вивчити наступні ***теми теоретичного змісту:***

Тема 1. Загальне визначення математичної моделі та принципів і задач моделювання.

Поняття, принципи і задачі моделювання. Етапи процесу моделювання. Поняття моделей, класифікація та основні вимоги до їх побудови. Етапи та підходи побудови моделей.

Тема 2. Методи збору та обробки інформації та даних

Ідентифікація закону розподілу. Інтерполяція та апроксимація функціональних залежностей. Статистична обробка експериментальних даних.

Тема 3. Методи математичного програмування

Класифікація методів математичного програмування. Лінійне програмування. Нелінійне програмування. Динамічне програмування.

Тема 4. Сучасні методи аналітичного моделювання

Формалізація дискретних систем. Аналітичне моделювання мереж масового обслуговування та мереж Петрі.

Тема 5. Методи імітаційного моделювання

Генератори випадкових величин. Сучасні алгоритми імітації дискретних систем. Імітаційні моделі мереж масового обслуговування та мереж Петрі.

Тема 6. Сучасні методи досліджень імітаційних моделей

Розробка плану та проведення за ним факторних експериментів.

Регресійний та дисперсійний аналіз факторів.

Тема 7. Застосування методів оптимізації при дослідженні імітаційних моделей

Проведення факторних експериментів за умови пошуку оптимальних значень. Методи групового урахування аргументів та еволюційні методи пошуку оптимальних значень.

Тема 8. Методи самоорганізації моделей.

Поняття самоорганізації моделей. Класифікація алгоритмів самоорганізації моделей (однорядний, багаторядний алгоритми).

2 ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТУ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗА ДАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Мета: Отримати практичні навички ідентифікації експериментальних даних в процесі проведення досліджень здобувачами вищої освіти

Завдання.

1. Виконати ідентифікацію випадкових величин та оцінювання параметрів закону розподілу за критеріями χ^2 та λ за даними спостережень (табл. 2.1-2.2). Зробити висновки за отриманими результатами виконаних обчислень. Розрахунки виконувати засобами Mathcad.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані спостережень для дослідження за критерієм λ

Номер досліду	Номер варіанту											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	10	6	8	9	7	5	6	7	2	10	5
2	6	4	3	3	5	3	3	2	4	5	6	6
3	5	3	3	2	4	2	2	1	4	2	6	0
4	10	8	5	6	8	6	4	5	6	2	9	4
5	13	11	7	9	10	8	5	6	8	4	4	5
6	7	5	4	4	6	4	3	3	5	6	2	2
7	4	2	2	1	4	2	2	1	3	3	3	0
8	9	7	5	6	7	5	4	4	6	1	6	3
9	0	2	2	1	0	0	1	0	0	4	9	0
10	10	8	5	6	8	6	4	5	6	1	4	4
11	4	2	2	1	4	2	2	1	3	3	2	0
12	3	1	2	1	3	1	1	0	3	2	1	0
13	8	6	4	5	6	4	3	3	5	7	3	3
14	11	9	6	7	9	7	4	5	7	2	4	4
15	5	3	3	2	4	2	2	2	4	8	2	1
16	2	0	1	0	2	0	1	0	2	2	1	6
17	7	5	4	4	6	4	3	3	5	1	3	2

Продовження табл. 2.1

Номер досліду	Номер варіанту											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	0	0	1	0	0	7	0	9	3	6	0	0
19	0	3	3	2	6	4	3	3	5	9	3	2
20	0	3	4	2	0	10	0	7	4	3	0	4
21	10	8	5	6	8	6	4	5	6	4	4	4
22	13	11	7	9	10	8	5	6	8	1	5	5
23	7	5	4	4	6	4	3	3	5	6	3	2
24	4	2	2	1	4	2	2	1	3	2	2	0
25	5	3	3	2	4	2	2	2	4	0	0	1
26	10	8	5	6	8	6	4	5	6	2	3	4
27	13	11	7	9	10	8	5	6	8	4	3	5
28	7	5	4	4	6	4	3	3	5	4	8	2
29	8	6	4	5	6	4	3	3	5	5	11	3
30	11	9	6	7	9	7	4	5	7	2	5	4
31	5	3	3	2	4	2	2	2	4	6	2	1
32	2	0	1	0	2	0	1	0	2	4	3	9
33	3	1	2	1	3	1	1	0	3	4	8	0
34	8	6	4	5	6	4	3	3	5	8	11	3
35	11	9	6	7	9	7	4	5	7	10	5	4
36	5	3	3	2	4	2	2	2	4	6	6	1
37	10	8	5	6	8	6	4	5	6	6	7	4
38	13	11	7	9	10	8	5	6	8	9	1	5
39	12	10	6	8	9	7	5	6	7	4	5	5
40	6	4	3	3	5	3	3	2	4	2	0	2
41	5	3	3	2	4	2	2	2	4	3	1	1
42	10	8	5	6	8	6	4	5	6	4	8	4
43	13	11	7	9	10	8	5	6	8	5	2	5
44	5	3	3	2	4	2	2	2	4	2	1	1
45	0	2	2	1	0	3	3	2	0	3	8	6
46	0	2	2	1	0	8	5	6	4	5	11	12

Кінець табл. 2.1

Номер досліду	Номер варіанту											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
47	4	2	2	1	4	2	2	1	3	11	3	0
48	5	3	3	2	4	2	2	2	4	3	10	1
49	6	4	3	3	5	3	3	2	4	2	4	2
50	9	7	5	6	7	5	4	4	6	2	0	3
51	3	1	2	1	3	1	1	0	3	2	0	0
52	7	5	4	4	6	4	3	3	5	3	4	2
53	2	0	1	0	2	0	1	0	2	4	4	5
54	3	1	2	1	3	1	1	0	3	7	5	0
55	10	8	5	6	8	6	4	5	6	1	7	4
56	4	2	2	1	4	2	2	1	3	5	3	0

Таблиця 2.2 – Вихідні дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2

№	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
1	7.058	10.11	5.23	5.23	6.782	9.583	7.22	8.15	7.22	7.22	8.15	9.562	6.63
	11.138	8.079	8.01	6.17	8.27	8.27	4.56	7.54	9.09	12.36	5.66	9.09	6.5
	7.358	6.299	9.1	5.91	8.15	8.15	8.15	5.581	5.44	10.03	11.339	3.56	10.03
	7.178	10.23	5.35	6.52	8.99	9.09	7.34	8.27	6.602	3.34	8.27	10.318	9.87
	6.398	8.199	4.57	6.371	7.541	6.89	10.03	5.24	9.21	10.23	7.623	9.023	9.297
	8.178	6.419	6.35	4.591	5.761	8.562	4.79	9.92	4.14	8.562	5.843	9.32	10.23
	9.958	9.199	8.13	7.371	5.612	6.782	10.23	9.08	10.86	6.782	9.583	6.864	10.341
	6.178	10.979	4.35	9.151	8.392	6.633	8.15	11.251	6.98	8.64	7.803	10.604	7.885
	7.058	10.11	5.23	5.23	6.782	9.583	7.22	8.15	7.22	7.22	8.15	9.562	6.63
2	7.681	10.733	5.853	5.853	7.405	10.206	7.843	8.773	7.843	7.843	8.773	10.185	7.253
	10.868	7.809	7.74	5.9	8.00	8.00	4.29	7.27	8.82	12.09	5.39	8.82	6.23
	8.378	7.319	10.12	6.93	9.17	9.17	9.17	6.601	6.46	11.05	12.359	4.58	11.05
	7.088	8.889	5.26	7.061	8.231	7.58	10.72	5.93	9.9	10.92	8.313	9.713	9.987
	8.568	6.809	6.74	4.981	6.151	8.952	5.18	10.31	4.53	8.952	6.233	9.71	10.62
	9.208	8.449	7.38	6.621	4.862	6.032	9.48	8.33	10.11	6.032	8.833	6.114	9.591
	6.468	11.269	4.64	9.441	8.682	6.923	8.44	11.541	7.27	8.93	8.093	10.894	8.175
	6.701	9.753	4.873	4.873	6.425	9.226	6.863	7.793	6.863	6.863	7.793	9.205	6.273

Продовження табл. 2.2

№	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
3	8.304	11.356	6.476	6.476	8.028	10.829	8.466	9.396	8.466	8.466	9.396	10.808	7.876
	10.598	7.539	7.47	5.63	7.73	7.73	4.02	7	8.55	11.82	5.12	8.55	5.96
	9.398	8.339	11.14	7.95	10.19	10.19	10.19	7.621	7.48	12.07	13.379	5.6	12.07
	9.258	7.499	7.43	5.671	6.841	9.642	5.87	11	5.22	9.642	6.923	10.4	11.31
	9.598	8.839	7.77	7.011	5.252	6.422	9.87	8.72	10.5	6.422	9.223	6.504	9.981
	5.718	10.519	3.89	8.691	7.932	6.173	7.69	10.791	6.52	8.18	7.343	10.144	7.425
	6.991	10.043	5.163	5.163	6.715	9.516	7.153	8.083	7.153	7.153	8.083	9.495	6.563
	7.324	10.376	5.496	5.496	7.048	9.849	7.486	8.416	7.486	7.486	8.416	9.828	6.896
4	8.927	11.979	7.099	7.099	8.651	11.452	9.089	10.019	9.089	9.089	10.019	11.431	8.499
	10.328	7.269	7.2	5.36	7.46	7.46	3.75	6.73	8.28	11.55	4.85	8.28	5.69
	10.418	9.359	12.16	8.97	11.21	11.21	11.21	8.641	8.5	13.09	14.399	6.62	13.09
	10.288	9.529	8.46	7.701	5.942	7.112	10.56	9.41	11.19	7.112	9.913	7.194	10.671
	6.108	10.909	4.28	9.081	8.322	6.563	8.08	11.181	6.91	8.57	7.733	10.534	7.815
	6.241	9.293	4.413	4.413	5.965	8.766	6.403	7.333	6.403	6.403	7.333	8.745	5.813
	7.614	10.666	5.786	5.786	7.338	10.139	7.776	8.706	7.776	7.776	8.706	10.118	7.186
	7.947	10.999	6.119	6.119	7.671	10.472	8.109	9.039	8.109	8.109	9.039	10.451	7.519
5	9.55	12.602	7.722	7.722	9.274	12.075	9.712	10.642	9.712	9.712	10.642	12.054	9.122
	10.058	6.999	6.93	5.09	7.19	7.19	3.48	6.46	8.01	11.28	4.58	8.01	5.42
	11.438	10.379	13.18	9.99	12.23	12.23	12.23	9.661	9.52	14.11	15.419	7.64	14.11
	6.798	11.599	4.97	9.771	9.012	7.253	8.77	11.871	7.6	9.26	8.423	11.224	8.505
	6.631	9.683	4.803	4.803	6.355	9.156	6.793	7.723	6.793	6.793	7.723	9.135	6.203
	6.864	9.916	5.036	5.036	6.588	9.389	7.026	7.956	7.026	7.026	7.956	9.368	6.436
	8.237	11.289	6.409	6.409	7.961	10.762	8.399	9.329	8.399	8.399	9.329	10.741	7.809
	8.57	11.622	6.742	6.742	8.294	11.095	8.732	9.662	8.732	8.732	9.662	11.074	8.142
6	10.173	13.225	8.345	8.345	9.897	12.698	10.335	11.265	10.335	10.335	11.265	12.677	9.745
	9.788	6.729	6.66	4.82	6.92	6.92	3.21	6.19	7.74	11.01	4.31	7.74	5.15
	12.458	11.399	14.2	11.01	13.25	13.25	13.25	10.681	10.54	15.13	16.439	8.66	15.13
	7.321	10.373	5.493	5.493	7.045	9.846	7.483	8.413	7.483	7.483	8.413	9.825	6.893
	7.254	10.306	5.426	5.426	6.978	9.779	7.416	8.346	7.416	7.416	8.346	9.758	6.826
	7.487	10.539	5.659	5.659	7.211	10.012	7.649	8.579	7.649	7.649	8.579	9.991	7.059
	8.86	11.912	7.032	7.032	8.584	11.385	9.022	9.952	9.022	9.022	9.952	11.364	8.432
	9.193	12.245	7.365	7.365	8.917	11.718	9.355	10.285	9.355	9.355	10.285	11.697	8.765

Продовження табл. 2.2

№	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
7	10.796	13.848	8.968	8.968	10.52	13.321	10.958	11.888	10.958	10.958	11.888	13.3	10.368
	9.518	6.459	6.39	4.55	6.65	6.65	2.94	5.92	7.47	10.74	4.04	7.47	4.88
	13.478	12.419	15.22	12.03	14.27	14.27	14.27	11.701	11.56	16.15	17.459	9.68	16.15
	7.944	10.996	6.116	6.116	7.668	10.469	8.106	9.036	8.106	8.106	9.036	10.448	7.516
	7.877	10.929	6.049	6.049	7.601	10.402	8.039	8.969	8.039	8.039	8.969	10.381	7.449
	8.11	11.162	6.282	6.282	7.834	10.635	8.272	9.202	8.272	8.272	9.202	10.614	7.682
	9.483	12.535	7.655	7.655	9.207	12.008	9.645	10.575	9.645	9.645	10.575	11.987	9.055
	9.816	12.868	7.988	7.988	9.54	12.341	9.978	10.908	9.978	9.978	10.908	12.32	9.388
8	11.419	14.471	9.591	9.591	11.143	13.944	11.581	12.511	11.581	11.581	12.511	13.923	10.991
	9.248	6.189	6.12	4.28	6.38	6.38	2.67	5.65	7.2	10.47	3.77	7.2	4.61
	14.498	13.439	16.24	13.05	15.29	15.29	15.29	12.721	12.58	17.17	18.479	10.7	17.17
	8.567	11.619	6.739	6.739	8.291	11.092	8.729	9.659	8.729	8.729	9.659	11.071	8.139
	8.5	11.552	6.672	6.672	8.224	11.025	8.662	9.592	8.662	8.662	9.592	11.004	8.072
	8.733	11.785	6.905	6.905	8.457	11.258	8.895	9.825	8.895	8.895	9.825	11.237	8.305
	10.106	13.158	8.278	8.278	9.83	12.631	10.268	11.198	10.268	10.268	11.198	12.61	9.678
	10.439	13.491	8.611	8.611	10.163	12.964	10.601	11.531	10.601	10.601	11.531	12.943	10.011
9	12.042	15.094	10.214	10.214	11.766	14.567	12.204	13.134	12.204	12.204	13.134	14.546	11.614
	8.978	5.919	5.85	4.01	6.11	6.11	2.4	5.38	6.93	10.2	3.5	6.93	4.34
	15.518	14.459	17.26	14.07	16.31	16.31	16.31	13.741	13.6	18.19	19.499	11.72	18.19
	9.19	12.242	7.362	7.362	8.914	11.715	9.352	10.282	9.352	9.352	10.282	11.694	8.762
	9.123	12.175	7.295	7.295	8.847	11.648	9.285	10.215	9.285	9.285	10.215	11.627	8.695
	9.356	12.408	7.528	7.528	9.08	11.881	9.518	10.448	9.518	9.518	10.448	11.86	8.928
	10.729	13.781	8.901	8.901	10.453	13.254	10.891	11.821	10.891	10.891	11.821	13.233	10.301
	11.062	14.114	9.234	9.234	10.786	13.587	11.224	12.154	11.224	11.224	12.154	13.566	10.634
10	12.665	15.717	10.837	10.837	12.389	15.19	12.827	13.757	12.827	12.827	13.757	15.169	12.237
	7.058	10.11	5.23	5.23	6.782	9.583	7.22	8.15	7.22	7.22	8.15	9.562	6.63
	11.138	8.079	8.01	6.17	8.27	8.27	4.56	7.54	9.09	12.36	5.66	9.09	6.5
	7.358	6.299	9.1	5.91	8.15	8.15	8.15	5.581	5.44	10.03	11.339	3.56	10.03
	7.178	10.23	5.35	6.52	8.99	9.09	7.34	8.27	6.602	3.34	8.27	10.318	9.87
	6.398	8.199	4.57	6.371	7.541	6.89	10.03	5.24	9.21	10.23	7.623	9.023	9.297
	8.178	6.419	6.35	4.591	5.761	8.562	4.79	9.92	4.14	8.562	5.843	9.32	10.23
	9.958	9.199	8.13	7.371	5.612	6.782	10.23	9.08	10.86	6.782	9.583	6.864	10.341

Кінець табл. 2.2

№	Дані спостережень для дослідження за критерієм χ^2												
11	6.049	6.049	9.592	8.662	9.081	8.322	8.28	11.55	4.85	6.419	6.35	4.591	10.666
	6.282	6.282	9.825	8.895	4.413	5.965	8.5	13.09	14.399	9.199	8.13	7.371	10.999
	7.655	7.655	11.198	10.268	5.786	7.338	11.19	7.112	9.913	10.979	4.35	9.151	12.602
	7.988	7.988	11.531	10.601	6.119	7.671	6.91	8.57	7.733	10.733	5.853	5.853	6.999
	9.591	9.591	13.134	12.204	7.722	9.274	6.403	6.403	7.333	7.809	7.74	5.9	10.379
	6.12	4.28	5.38	6.93	5.09	7.19	7.776	7.776	8.706	7.319	10.12	6.93	11.599
	16.24	13.05	13.741	13.6	9.99	12.23	8.109	8.109	9.039	8.889	5.26	7.061	9.683
	5.581	5.44	10.282	9.352	9.771	9.012	9.712	9.712	10.642	6.809	6.74	4.981	9.916
12	7.623	9.023	9.297	7.601	10.402	8.039	9.683	4.803	4.803	6.355	8.662	9.592	8.662
	5.843	9.32	10.23	7.834	10.635	8.272	9.916	5.036	5.036	6.588	8.895	9.825	8.895
	9.583	6.864	10.341	9.207	12.008	9.645	11.289	6.409	6.409	7.961	10.268	11.198	10.268
	7.803	10.604	7.885	9.54	12.341	9.978	11.622	6.742	6.742	8.294	10.601	11.531	10.601
	8.773	10.185	7.253	11.143	13.944	11.581	13.225	8.345	8.345	9.897	12.204	13.134	12.204
	5.39	8.82	6.23	6.38	6.38	2.67	6.729	6.66	4.82	6.92	2.4	5.38	6.93
	12.359	4.58	11.05	15.29	15.29	15.29	11.399	14.2	11.01	13.25	16.31	13.741	13.6
	8.313	9.713	9.987	8.291	11.092	8.729	10.373	5.493	5.493	7.045	9.352	10.282	9.352

Приклад ідентифікації випадкової величини засобами Mathcad

Спостережувальні значення випадкової величини

A :=

	0	1	2	3	4
0	9.379	8.76	10.81	9.876	11.15
1	10.61	7.882	9.466	9.682	11.44
2	9.515	9.591	9.146	10.06	11.55
3	9.198	12.05	11.58	9.771	12.55
4	9.153	9.432	7.652	10.34	7.988
5	9.461	9.694	10.68	9.578	11.32
6	10.89	10.97	10.31	9.968	...

Формування масиву спостережувальних значень випадкової величини

$j := 0..\,rows(A) - 1$

$k := 0..\,cols(A) - 1$

$\zeta_{j+k\cdot rows(A)} := A_{j,k}$

Кількість значень у масиві $n :=$ довжина(ζ) $n = 84$ $i := 0..\,n - 1$

Кількість інтервалів в гістограмі $m := 12$ $j := 0..\,m$

Довжина інтервалу: $\Delta x := \dfrac{\max(\zeta) - \min(\zeta)}{m - 1}$ $\max(\zeta) = 12.55$

$\min(\zeta) = 7.652$

$\Delta x = 0.445$

Поділ на інтервали: $x_j := \min(\zeta) - \dfrac{\Delta x}{2} + j\cdot\Delta x$ довжина$(x) = 13$

Лістинг програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм χ^2.

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	7.429	7.875	8.32	8.765	9.21	9.656	10.101	...

Кількість влучень в інтервал: $h := hist(x, \zeta)$

$h^T =$

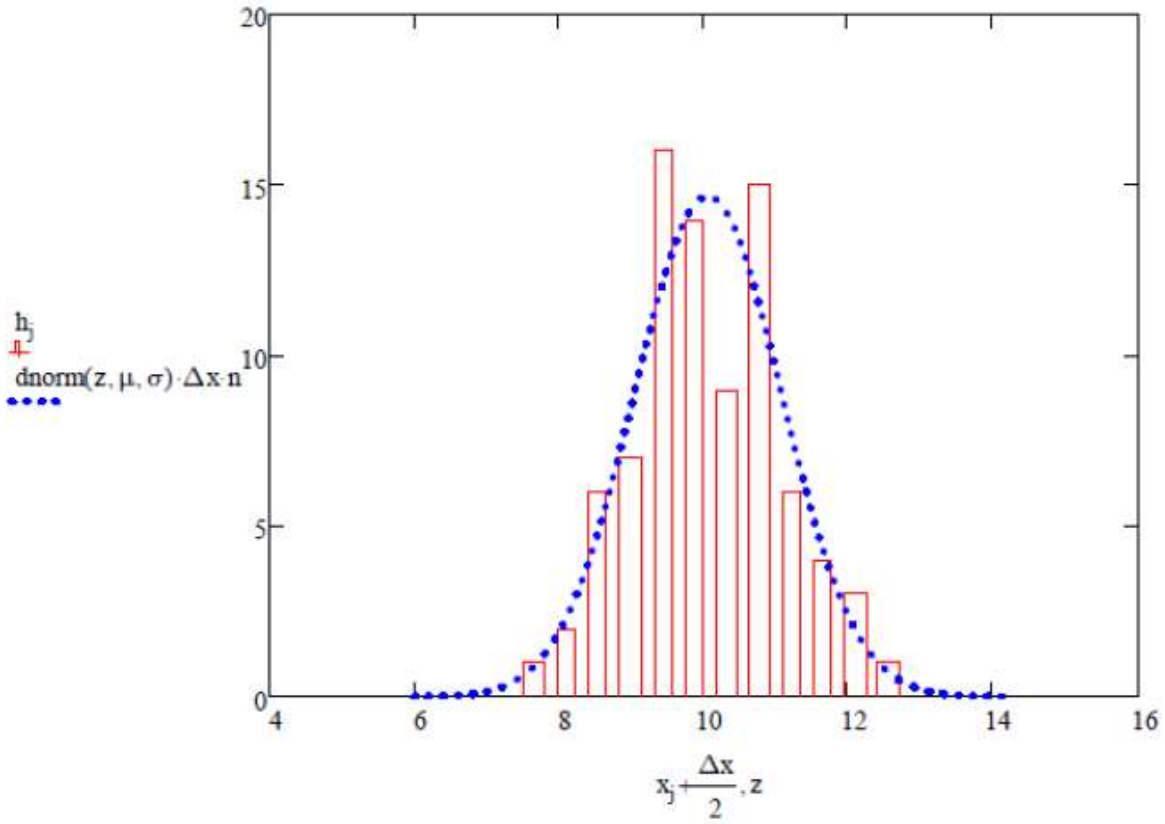
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	6	7	16	14	9	15	6	...

Оцінка середнього значення випадкової величини: $\mu := mean(\zeta) = 10.056$

Оцінка середньоквадратичного відхилення: $\sigma := \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\cdot stdev(\zeta) = 1.018$

Побудова гістограми частот:

$$z = \mu - 4\delta, \mu - 4\sigma + 0.01..\,\mu + 4\sigma$$



Розрахунок теоретичного очікування кількості влучень:

$$j := 0 .. m - 1$$

$$h_{teor_j} := \left(pnorm\left(x_{j+1}, \mu, \sigma\right) - pnorm\left(x_j, \mu, \sigma\right)\right) \cdot n$$

$h_{teor}{}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.932	2.347	4.895	8.455	12.095	14.331	14.063	...

Продовження лістингу програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за критерієм χ^2.

Побудова функції, що виконує об'єднання сусідніх груп у разі, якщо кількість влучень менша за п'ять:

```
grup(v, w) := | j ← 0
              | for i ∈ 0 .. length(v) − 1
              |   | 1  if | v_i ≥ 5
              |   |        | a_j ← v_i
              |   |        | b_j ← w_i
              |   |        | j ← j + 1
              |   | otherwise
              |   |   | 0  if | i = length(v) − 1
              |   |   |       | a_(j−1) ← a_(j−1) + v_i
              |   |   |       | b_(j−1) ← b_(j−1) + v_i
              |   |   | otherwise
              |   |   |   | v_(i+1) ← v_i + v_(i+1)
              |   |   |   | w_(i+1) ← w_i + w_(i+1)
              | (a)
              | (b)
```

Групована спостережувана кількість влучень: $H := grup(h, h_{teor})0$

$H^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	6	7	16	14	9	15	6	...

$H_{teor}{}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.932	2.347	4.895	8.455	12.095	14.331	14.063	...

Розрахунок спостережуваного значення хі-квадрат:

$j := 0 .. длина(H) - 1$ $\qquad \chi := \sum_j \frac{\left(H_j - H_{teor_j}\right)^2}{H_{teor_j}} = 5.757$

Табличне значення хі-квадрат при рівні значущості 0,05: $qchisq(0.95, m - 1 - 2) = 16.919$

Формування відповіді: $result := if(\chi < qchisq(0.95, m - 3), "YES", "NO") = "YES"$

Спостережувальні значення випадкової величини

A :=

	0
0	0
1	7
2	9
3	5
4	5
5	7
6	7
7	11
8	6
9	4
10	7
11	4
12	6
13	1
14	4
15	...

$A^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	7	9	5	5	7	7	11	6	...

Формування масиву спостережувальних значень випадкової величини

$n_s := \mathrm{rows}(A) = 21 \qquad N := \mathrm{cols}(A) = 1 \qquad j := 0..n_s - 1 \qquad k := 0..N - 1$

$\zeta_{j+k\cdot n_s} := A_{j,k}$

Кількість значень у масиві:

$n := \text{длина}(\zeta) = 21 \qquad i := 0..n_s - 1$

Визначення мінімального та максимального спостережувальних значень:

$x_{min} := \min(\zeta) = 0$

$x_{max} := \max(\zeta) = 11$

Лістинг програми в Mathcad ідентифікації випадкової величини за

критерієм λ.

Кількість інтервалів у гістограмі:

$m := 1 + x_{max} - x_{min} = 12 \qquad j := 0..m$

Довжина інтервалу: $\Delta x := 1$

Поділ на інтервали: $x_j := x_{min} - \frac{\Delta x}{2} + j \cdot \Delta x$

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	...

Середини інтервалів: $k := 0..m-1 \qquad x_{m_k} := x_k + \frac{\Delta x}{2}$

$x_m{}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

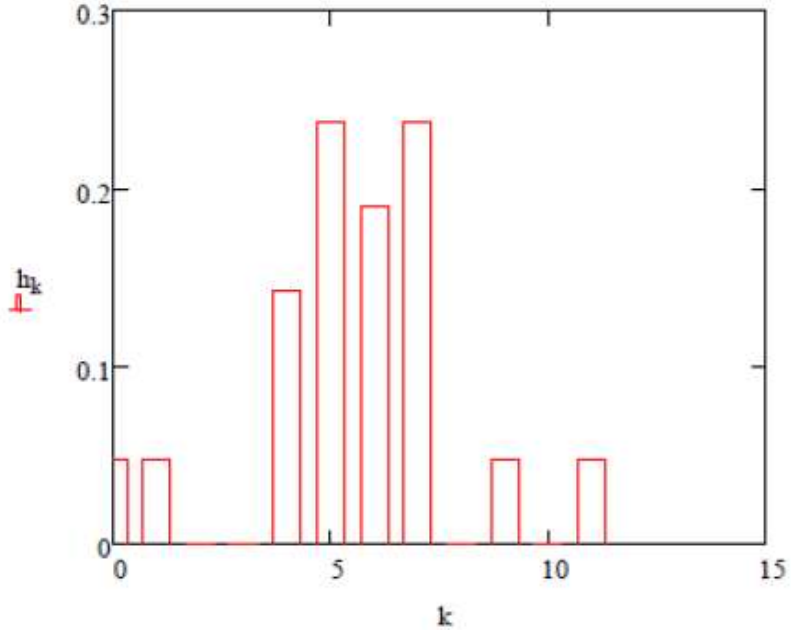
Частота влучень в інтервалі:

$h := \frac{hist(x, \zeta)}{n} \qquad \sum_k h_k = 1$

$h^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.048	0.048	0	0	0.143	0.238	0.19	0.238	...

Формування гіпотези про закон розподілу:



Сумарна частота влучень в інтервали:

$$w_k := \sum_{j=0}^{k} h_j \qquad w_{m-1} = 1$$

$w^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.048	0.095	0.095	0.095	0.238	0.476	0.667	0.905	...

Оцінювання параметрів закону розподілу:

середнє значення $\mu_1 := \mathrm{mean}(\zeta) = 5.571$

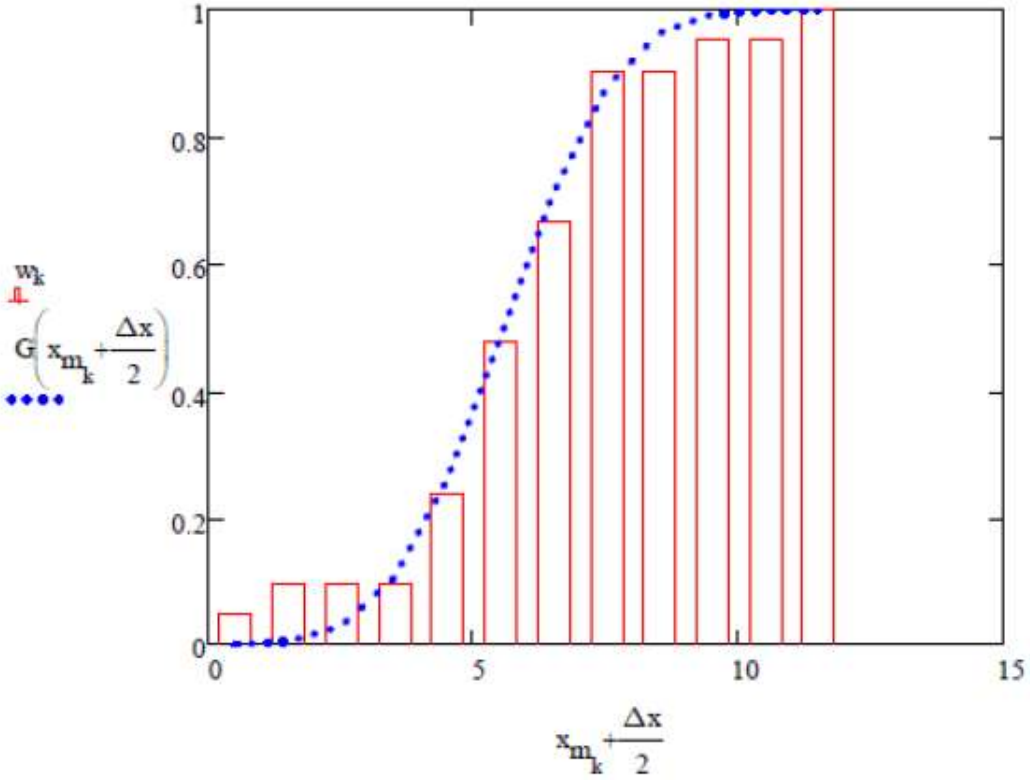
середньоквадратичне відхилення $\sigma_1 := \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \mathrm{stdev}(\zeta) = 2.378$

максимальне $c := x_{max} = 11$

$$p := \frac{\mu_1}{c} = 0.506$$

Візуальне порівняння гістограми сумарних частот випадкових чисел з гіпотетичним законом розподілу:

$G(i) := \mathrm{pbinom}(i, c, p)$



Перевірка гіпотези за критерієм λ:

$k := 0..m-1$

Спостережувана сумарна частота влучень в інтервали:

$w^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.048	0.095	0.095	0.095	0.238	0.476	0.667	0.905	...

Теоретична сумарна самтота влучень в інтервали:

$$w_{teor_k} := G\left(x_{m_k} + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$w_{teor}^T =$

	0	1	2	3	4
0	$4.229 \cdot 10^{-4}$	$5.197 \cdot 10^{-3}$	0.03	0.105	...

$$delta_w_k := \left|w_k - w_{teor}\right|$$

$delta_w^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2.218	2.095	2.095	2.095	1.767	1.45	1.505	1.922	...

$$\lambda := \max(delta_w) \cdot \sqrt{n} = 10.163$$

Формування висновку щодо відповідності випадкової величини обраному закону:

result := if(λ < 1.36, "YES", "NO") = "NO"

Запитання для самоперевірки

1. Яким чином дослідник може визначити закон розподілу випадкової величини?

2. Сформулюйте головні задачі ідентифікації закону розподілу?

3. Визначте критерії відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу.

4. Надайте алгоритм визначення критерію χ^2 та λ-критерію.

5. Яка інформація надається досліднику після проведення оцінювання відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу?

6. Визначте при яких умовах виконується оцінка відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу за критерієм χ^2?

7. Визначте при яких умовах виконується оцінка відповідності випадкових величин, що досліджуються, до того чи іншого закону розподілу за λ-критерієм?

8. Сформулюйте основні задачі ідентифікації функціональної залежності.

9. Яким чином дослідник визначає функціональну залежність між змінними моделі?

3 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ДАНИХ

Мета: Отримати практичні навички аналізу експериментальних даних методами інтерполяції та апроксимації під час виконання досліджень

Завдання.

1. Виконати інтерполяцію заданих даних (табл. 3.1) за допомогою формул Ньютона.

2. За даними спостережень (табл. 3.2) виконати апроксимацію функціональної залежності.

Таблиця 3.1 – Дані спостережень (завдання 1)

Варіант	Змінні	Дані спостережень										
1	X	0	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95	1.1	1.25	1.4
	Y	0.1	0.18	0.26	0.34	0.42	0.5	0.58	0.66	0.74	0.82	0.9
2	X	0	0.13	0.28	0.43	0.58	0.73	0.88	1.03	1.18	1.33	1.48
	Y	0	0.25	0.33	0.41	0.49	0.57	0.65	0.73	0.81	0.89	0.97
3	X	0	0.21	0.36	0.51	0.66	0.81	0.96	1.11	1.26	1.41	1.56
	Y	0.05	0.32	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8	0.88	0.96	0.96
4	X	0	0.29	0.44	0.59	0.74	0.89	1.04	1.19	1.34	1.49	1.64
	Y	0.01	0.41	0.49	0.57	0.65	0.73	0.81	0.89	0.97	0.98	1
5	X	0	0.37	0.52	0.67	0.82	0.97	1.12	1.27	1.42	1.57	1.72
	Y	0	0.38	0.46	0.54	0.62	0.7	0.78	0.86	0.94	0.95	0.97
6	X	0	0.45	0.6	0.75	0.9	1.05	1.2	1.35	1.5	1.65	1.8
	Y	0.11	0.42	0.5	0.58	0.66	0.74	0.82	0.9	0.98	0.99	1
7	X	0	0.53	0.68	0.83	0.98	1.13	1.28	1.43	1.58	1.73	1.88
	Y	0	0.49	0.57	0.65	0.73	0.81	0.89	0.97	1.05	1.06	1.07
8	X	0	0.61	0.76	0.91	1.06	1.21	1.36	1.51	1.66	1.81	1.96
	Y	0.08	0.43	0.51	0.59	0.67	0.75	0.83	0.91	0.95	0.968	0.99
9	X	0	0.69	0.84	0.99	1.14	1.29	1.44	1.59	1.74	1.89	2.04
	Y	0	0	0.39	0.47	0.55	0.63	0.71	0.79	0.83	0.848	0.87
10	X	0	0.77	0.92	1.07	1.22	1.37	1.52	1.67	1.82	1.97	2.12
	Y	0	0	0.46	0.54	0.62	0.7	0.78	0.86	0.9	0.918	0.94
11	X	0	0.85	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9	2.05	2.2
	Y	0	0.01	0.33	0.41	0.49	0.57	0.65	0.73	0.77	0.788	0.81
12	X	0	0.93	1.08	1.23	1.38	1.53	1.68	1.83	1.98	2.13	2.28
	Y	0	0	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8	0.84	0.858	0.88

Таблиця 3.2 – Дані спостережень (завдання 2)

№	Змінні	Дані спостережень																				
1	X1	3	3	5	5	1	2	2	4	6	3	3	4	2	4	4	3	5	6	7	7	8
	X2	12	12	20	20	4	8	8	16	24	12	12	16	8	16	16	12	20	24	28	28	32
	X3	36	45	69	73	21	33	33	57	81	45	45	57	33	57	57	45	69	81	93	93	105
	Y	60.4	14.	19.4	59.	78.2	52.1	50	92	12.3	80	26.	13	95	35.	14	10.2	29.	18.2	91	50	17
2	X1	5	4	7	9	3	4	4	6	8	5	5	6	4	6	6	5	7	8	9	9	10
	X2	20	16	28	36	12	16	16	24	32	20	20	24	16	24	24	20	28	32	36	36	40
	X3	60	57	93	121	45	57	57	81	105	69	69	81	57	81	81	69	93	105	117	117	129
	Y	95	35	14	10.	29.1	18	91	50	17	14	18	100	17.	60.4	14.	19.4	59.	78.2	52.	50	92
3	X1	1	4	3	3	6	3	6	2	4	1	1	2	5	2	2	1	3	4	5	5	6
	X2	4	16	12	12	24	12	24	8	16	4	4	8	20	8	8	4	12	16	20	20	24
	X3	12	48	36	36	72	36	72	24	48	12	12	24	60	24	24	12	36	48	60	60	72
	Y	52.1	50	92	12.	80	26.4	13,2	95	35.	14.	19.	59.	78.	52.1	50	92	12.	80	50	17	14
4	X1	6	3	3	4	2	4	4	3	6	3	3	4	7	4	4	3	6	9	13	7	8
	X2	24	12	12	16	8	16	16	12	24	12	12	16	28	16	16	12	24	36	52	28	32
	X3	81	45	45	57	33	57	57	45	81	45	45	57	93	57	57	45	72	108	156	84	96
	Y	19.4	59.	78.2	52.	50	92	12.3	80	20.1	19.4	59.	78.	52.	50	92	12.3	80	26.4	13.	95	35.
5	X1	7	8	2	5	5	6	4	2	4	4	7	5	1	2	8	2	2	4	6	3	3
	X2	28	32	8	20	20	24	16	8	16	16	28	20	4	8	32	8	8	16	24	12	12
	X3	93	105	33	69	69	81	57	33	57	57	93	73	21	33	105	33	33	57	81	45	45
	Y	57	81.	105.	69.	69	81.02	57.1	81.	89	52.1	50	92	12.	80	20.1	19.4	59.	78.2	52.	50	92
6	X1	9	10	4	7	7	8	6	4	6	6	9	9	3	4	10	4	4	6	8	5	5
	X2	36	40	16	28	28	32	24	16	24	24	36	36	12	16	40	16	16	24	32	20	20
	X3	117	129	57	93	93	105	81	57	81	81	117	121	45	57	129	57	57	81	105	69	69
	Y	52.1	50	92	12.	81.	105.	69.1	69	81.	57.1	26.4	13,2	95	35.02	14.02	19.35	59.3	78.19	52.1	50	19.05
7	X1	5	6	6	3	3	4	2	5	2	2	5	3	6	3	12	3	6	2	4	1	1
	X2	20	24	24	12	12	16	8	20	8	8	20	12	24	12	48	12	24	8	16	4	4
	X3	60	72	72	36	36	48	24	60	24	24	60	36	72	36	144	36	72	24	48	12	12
	Y	35.	14.	19.4	59.3	78.2	52.1	50	92	12.3	81.2	105.	69.1	69	81.	57.1	81.1	89	52.1	81.2	105.	69.1
8	X1	7	8	2	5	5	11	4	7	4	4	13	4	2	4	4	4	4	3	6	3	3
	X2	28	32	8	20	20	44	16	28	16	16	52	16	8	16	16	16	16	12	24	12	12
	X3	84	96	24	60	60	132	57	93	57	57	156	57	33	57	57	57	57	45	81	45	45
	Y	35.	14.	19.4	59.3	78.2	52.1	50	19.1	12.3	81.2	105.	69.1	69	81.	57.1	81.1	80	26.4	13,2	95	35.
9	X1	3	10	4	7	1	2	0	3	0	6	3	1	4	9	6	6	5	5	8	5	5
	X2	12	40	16	28	4	8	0	12	0	24	12	4	16	36	24	24	20	20	32	20	20
	X3	45	129	57	93	12	24	0	36	0	72	36	12	57	121	81	81	69	69	105	69	69
	Y	105.	69.1	69	81.	57.1	81.1	80	26.4	12.3	81.2	105.	69.1	69	81.	57.1	81.1	80	20.	19.4	59.3	78.2
10	X1	2	4	4	7	3	4	2	6	2	2	11	2	0	2	6	5	2	6	4	1	7
	X2	8	16	16	28	12	16	8	24	8	8	44	8	0	8	24	20	8	24	16	4	28
	X3	33	57	57	93	45	57	33	72	24	24	132	24	0	24	72	60	24	72	48	12	84
	Y	69.13	69	81.02	57.1	81.1	80	26.4	13,2	95	35.	69.1	69	81.	57.1	81.1	80	26.4	13,2	95	35.02	88.
11	X1	4	6	6	9	2	6	2	9	3	3	3	5	3	4	2	4	4	8	6	3	3
	X2	16	24	24	36	8	24	8	36	12	12	12	20	12	16	8	16	16	32	24	12	12
	X3	57	81	81	117	33	81	33	117	45	36	45	69	45	57	33	57	57	105	81	45	36
	Y	95	35.	14.02	19.4	59.3	78.2	52.1	50	92	19.1	12.3	81.2	105.	69.1	69	81.	57.1	81.1	52.1	81.23	105.
12	X1	5	2	2	5	4	8	4	11	5	5	4	7	2	5	5	6	4	4	2	5	5
	X2	20	8	8	20	16	32	16	44	20	20	16	28	8	20	20	24	16	16	8	20	20
	X3	60	24	24	60	57	105	57	141	69	60	57	93	33	69	69	81	48	48	24	60	69
	Y	19.1	12.3	81.2	105.	69.1	69	81.	57.1	81.1	81.	57.1	26.4	13,2	95	35.	14.	19.4	12.3	81.2	105.	17.1

Приклад виконання завдань засобами Mathcad.

Інтерполяція за формулами Ньютона

ORIGIN := 0 M := 6

X :=

	0
0	0
1	0.4
2	0.6
3	0.7
4	0.8
5	0.9
6	1

Y :=

	0
0	0
1	0
2	0.01
3	0.03
4	0.06
5	0.13
6	0.37

Ступінь поліномів Ньютона $N := \mathrm{length}(X) = 7$

Побудова матриці кінцевих різниць порядків 1,2,...,M:

$$D(X,Y,M) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow \mathrm{length}(Y) \\ \text{for } i \in 0..N-2 \\ \quad \Delta_{i,0} \leftarrow Y_{i+1} - Y_i \\ \text{for } j \in 1..M-1 \\ \quad \text{for } i \in 0..N-2-j \\ \quad\quad \Delta_{i,j} \leftarrow \Delta_{i+1,j-1} - \Delta_{i,j-1} \\ \Delta \end{array} \right.$$

$\Delta := D(X,Y,M)$

Лістинг програми в Mathcad для виконання інтерполяції за формулами Ньютона.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.03 & 0.04 \\ 0.01 & 0.01 & 0 & 0.03 & 0.07 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0.03 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.03 & 0.04 & 0.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0.07 & 0.17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Реалізація першої формули Ньютона для заданого x за відомою матрицею кінцевих різниць Δ (використовується лише перша відома точка):

$$P_1(x, X, Y, \Delta) := \left| \begin{array}{l} \left(h \leftarrow X_1 - X_0 \;\; p \leftarrow Y_0 \;\; nf \leftarrow 1 \;\; q \leftarrow \frac{x - X_0}{h} \;\; qp \leftarrow q \right) \\ \text{for } j \in 1..\text{cols}(\Delta) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + \frac{\Delta_{0,j-1}}{nf} \cdot qp \\ nf \leftarrow nf \cdot (j+1) \\ qp \leftarrow qp \cdot (q-j) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

Реалізація другої формули Ньютона для заданого x за відомою матрицею кінцевих різниць Δ (використовується лише остання відома точка):

$$P_2(x, X, Y, \Delta) := \left| \begin{array}{l} \left(N \leftarrow \text{last}(X) \;\; h \leftarrow X_N - X_{N-1} \;\; p \leftarrow Y_N \;\; nf \leftarrow 1 \;\; q \leftarrow \frac{x - X_N}{h} \;\; qp \leftarrow q \right) \\ \text{for } j \in 1..\text{cols}(\Delta) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow p + \frac{\Delta_{N-j,j-1}}{nf} \cdot qp \\ nf \leftarrow nf \cdot (j+1) \\ qp \leftarrow qp \cdot (q-j) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

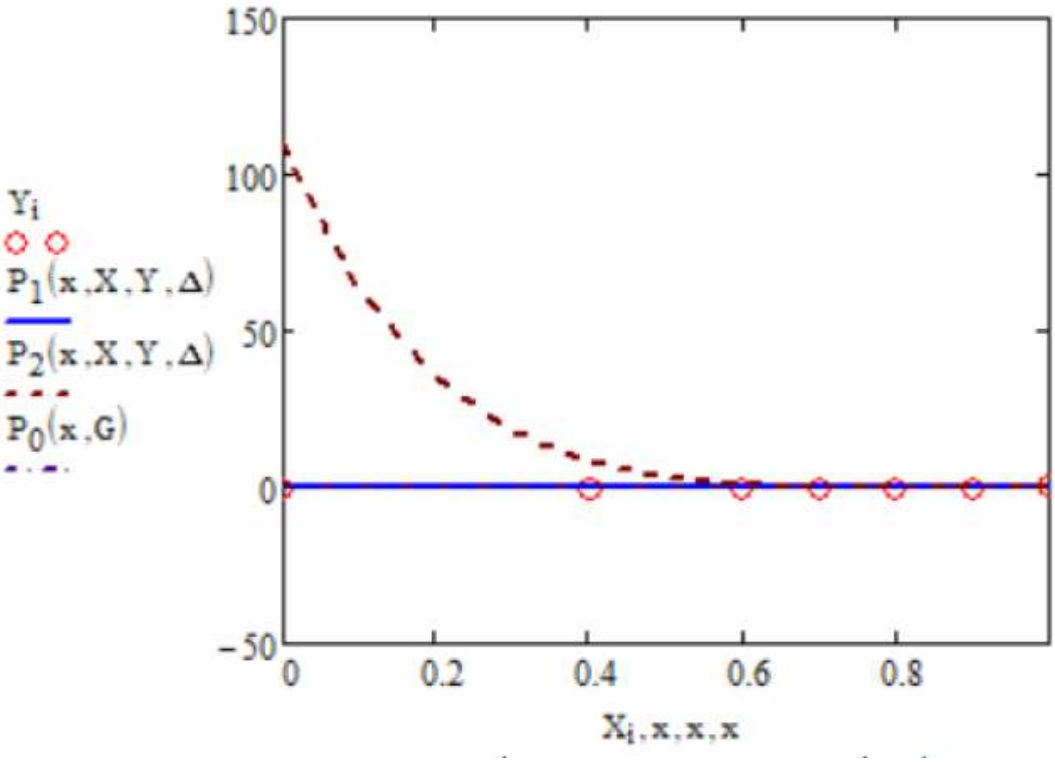
Для порівняння виконуємо реалізацію за тими ж даними звичайного канонічного полінома:

$i := 0..\,last(X) \qquad j := 0..\,last(X) \qquad C_{i,j} := (X_i)^j \qquad G := C^{-1}\cdot Y$

$$P_0(x,G) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..\,last(G) \\ \quad p \leftarrow p + G_i \cdot x^i \\ p \end{array} \right.$$

Побудова 2 поліномів Ньютона та канонічного полінома у межах зміни X із заданим шагом dx

$dx := 0.1 \qquad x := X_0, X_0 + dx .. X_{last(X)} \qquad i := 0..\,last(X)$



Форматування масиву спостережувальних даних

Data :=

	0	1
0	2	27
1	3	...

$j := 0..\,cols(Data) - 2$

$X^{\langle j \rangle} := Data^{\langle j \rangle}$

$Y := Data^{\langle cols(Data)-1 \rangle}$

$X^{\langle 0 \rangle} =$

	0
0	2
1	3
2	4
3	3
4	4
5	3
6	4
7	3
8	2
9	2
10	5
11	2
12	2
13	4
14	4
15	2

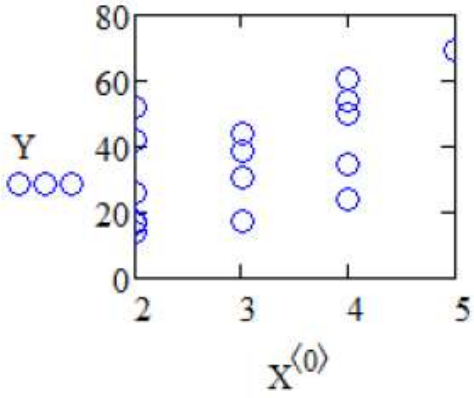
$X^{\langle 1 \rangle} =$

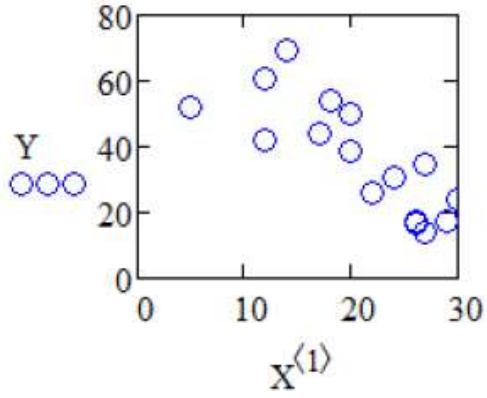
	0
0	27
1	29
2	18
3	17
4	27
5	24
6	30
7	20
8	12
9	26
10	14
11	22
12	5
13	12
14	20
15	26

$Y =$

	0
0	14.01
1	17.01
2	53.99
3	43.83
4	34.72
5	30.92
6	24.19
7	38.55
8	41.69
9	16.65
10	69.34
11	25.92
12	51.83
13	60.58
14	50
15	17.1

Візуальне спостереження залежності вихідної змінної від вхідних параметрів:





Формування гіпотези про вид функціональної залежності:

$$\mathrm{fun}(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ (x_1)^2 \end{bmatrix} \qquad k := 3$$

$$f(x, b) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \mathrm{fun}(x)_0 \\ \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad a \leftarrow a + b_i \cdot \mathrm{fun}(x)_i \\ a \end{array} \right.$$

Оцінка значень параметрів функціональної залежності за МНК (метод найменших квадратів)

$$i := 0..\mathrm{rows}(\mathrm{Data}) - 1$$

Формування матриці для обчислення параметрів:

$$\mathrm{Matrix_X}_{i,0} := 1$$

$$\mathrm{Matrix_X}_{i,1} := X_{i,0}$$

$$\mathrm{Matrix_X}_{i,2} := (X_{i,1})^2$$

$\mathrm{Matrix_X}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	3	4	3	4	3	2	2
2	729	841	324	289	729	576	900	400	144	...

Розрахунок параметрів функціональної залежності:

$$\mathrm{koef_b} := \left(\mathrm{Matrix_X}^T \cdot \mathrm{Matrix_X}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Matrix_X}^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 31.187 \\ 9.528 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$

Розрахунок значень вихідної змінної за функціональною залежністю:

$$f\left[\begin{pmatrix} X^{\langle 0\rangle} \\ X^{\langle 1\rangle} \end{pmatrix}, koef_b\right]^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	14.901	18.846	54.147	46.364	33.957	...

Кількість спостережень: $n := rows(Data)$

Розрахунок критерію НМК:

$$K_{rit} := \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left[\begin{pmatrix} X^{\langle 0\rangle} \\ X^{\langle 1\rangle} \end{pmatrix}, koef_b\right]_i - Y_i \right]^2 = 37.739$$

Кореляційно-регресійний аналіз знайденої функціональної залежності

Розрахунок індексу кореляції:

$$\sigma_{fact} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left[\begin{pmatrix} X^{\langle 0\rangle} \\ X^{\langle 1\rangle} \end{pmatrix}, koef_b\right]_i - mean(Y) \right]^2 = 294.128$$

$$\sigma_{zag} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(Y_i - mean(Y)\right)^2 = 294.51$$

Індекс кореляції: $R := \sqrt{\frac{\sigma_{fact}}{\sigma_{zag}}} = 0.999$

Індекс кореляції показує, що (за шкалою Чеддока) зв'язок між вихідною змінною y та множиною вхідних змінних x є суттєвим.

Індекс детермінації: $R^2 = 0.999$

Індекс детермінації показує, що 99% загальної варіації вихідної змінною y пояснюється факторами x.

Розрахунок індексу кореляції (матричний спосіб):

$$RR := \sqrt{\frac{\left[koef_b \cdot \left(Matrix_X^T \cdot Y\right)\right] - n \cdot mean(Y)^2}{Y^T \cdot Y - n \cdot mean(Y)^2}} = 0.998$$

Істотність індексу кореляції:

$$F := \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - k - 1}{k}$$

$$\text{if}(F > qF(0.95, k, n - k - 1), \text{"YES"}, \text{"NO"}) = \text{"YES"}$$

Індекс кореляції є істотним.

Дослідження значущості параметрів функціональної залежності

$$j := 0 .. k - 1$$

$$d_j := \left[\left(\text{Matrix_X}^T \cdot \text{Matrix_X}\right)^{-1}\right]_{j,j}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0.952 \\ 0.067 \\ 9.125 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$s_kv := \frac{1}{n - k - 1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left[f\left[\begin{pmatrix} X^{\langle 0 \rangle} \\ X^{\langle 1 \rangle} \end{pmatrix}, \text{koef_b}\right]_i - Y_i \right]^2 = 3.145$$

$$t_j := \frac{\left|\text{koef_b}_j\right|}{\sqrt{d_j \cdot s_kv}} \qquad t = \begin{pmatrix} 18.023 \\ 20.702 \\ 29.427 \end{pmatrix}$$

$$\text{if}\left(t_j > qt(0.95, n - 2), \text{"YES"}, \text{"NO"}\right) = \begin{pmatrix} \text{"YES"} \\ \text{"YES"} \\ \text{"YES"} \end{pmatrix}$$

Встановлено, що всі параметри функціональної залежності є значущіми.

Визначення довірчих інтервалів параметрів функціональної залежності

$$b_min_j := koef_b_j - qt(0.95, n-2)\cdot\sqrt{d_j\cdot s_kv}$$

$$b_max_j := koef_b_j + qt(0.95, n-2)\cdot\sqrt{d_j\cdot s_kv}$$

$$b_min = \begin{pmatrix} 28.14 \\ 8.717 \\ -0.053 \end{pmatrix} \quad koef_b = \begin{pmatrix} 31.187 \\ 9.528 \\ -0.05 \end{pmatrix} \quad b_max = \begin{pmatrix} 34.235 \\ 10.338 \\ -0.047 \end{pmatrix}$$

З огляду на отримані результати, найбільш неточним є визначений перший параметр, а найбільш точним виявився останній параметр.

Запитання для самоперевірки

1. Надайте визначення інтерполяції даних та її класифікацію.

2. Поясніть алгоритм виконання інтерполяції даних за допомогою виразів Ньютона.

3. Визначте особливості виконання інтерполяції за формулами Ньютона.

4. У яких випадках розв’язок задачі апроксимації не можливий?

5. За якими показниками дослідник визначає вид апроксимуючої функції?

6. Які обмеження впливають на той чи інший вид функціональної залежності в задачах апроксимації?

7. Назвіть критерії визначення параметрів функціональної залежності.

8. Визначте головну мету кореляційно-регресійного аналізу.

9. Які критерії оцінки значущості параметрів функціональної залежності є? Охарактеризуйте їх.

10. Який критерій дозволяє оцінити істотність індексу кореляції?

11. Яка інформація надається при наявності довірчого інтервалу?

4 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ВИРІШЕННІ ЗАДАЧ ПЛАНУВАННЯ

Мета: Отримати практичні навички застосування методів математичного програмування при розв’язанні задач планування.

Завдання.

1. Знайти найкоротший шлях з пункту А до пункту Б. Схема транспортної мережі представлена на рис. 4.1 із зазначеними відстанями між об’єктів (табл. 4.1).

2. Визначити максимальний потік для транспортної мережі. Схема транспортної мережі представлена на рис. 4.1 із зазначеною пропускною здатністю ділянок мережі (табл. 4.1).

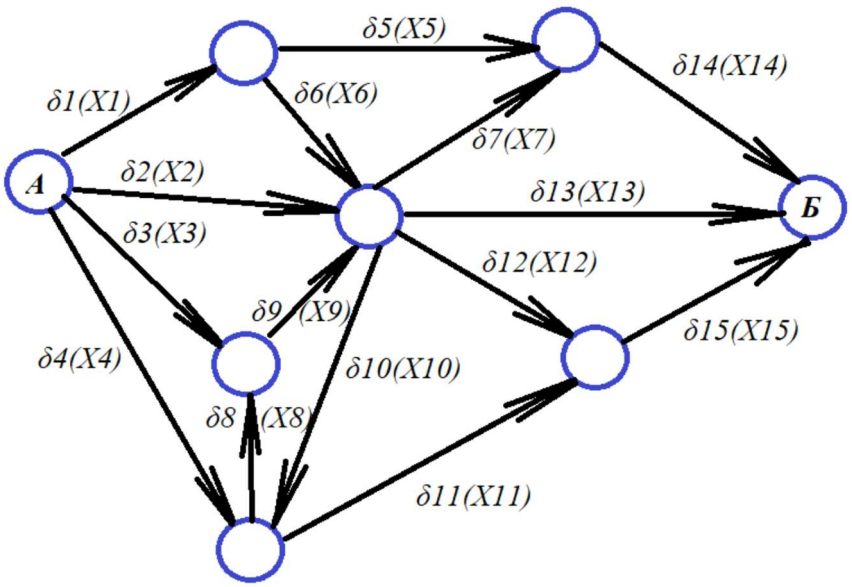


Рисунок 4.1 – Транспортна мережа

Таблиця 4.1 – Вихідні дані

Варіант	Показник	Дані														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Відстані між об'єктів δi	3	4	4	7	8	9	5	9	7	5	3	4	5	9	3
	Пропускна здатність ділянок Xi	10	4	10	13	15	17	9	17	13	9	5	7	9	17	5
2	Відстані між об'єктів δi	5	6	6	9	10	11	7	11	9	7	5	6	7	11	5
	Пропускна здатність ділянок Xi	9	6	10	17	19	21	13	21	17	13	9	11	13	21	9
3	Відстані між об'єктів δi	7	8	4	11	12	13	9	13	11	9	7	8	9	13	7
	Пропускна здатність ділянок Xi	8	8	5	16	18	20	12	20	16	12	8	10	12	20	8
4	Відстані між об'єктів δi	4	5	1	8	9	10	6	10	8	6	4	5	6	10	4
	Пропускна здатність ділянок Xi	7	10	5	15	17	19	11	19	15	11	7	9	11	19	7
5	Відстані між об'єктів δi	6	7	4	10	11	12	8	12	10	8	6	7	8	12	6
	Пропускна здатність ділянок Xi	6	7	9	14	16	18	10	18	14	10	6	8	10	18	6
6	Відстані між об'єктів δi	3	4	5	7	8	9	5	9	7	5	3	4	5	9	3
	Пропускна здатність ділянок Xi	5	4	11	16	18	20	12	20	16	12	8	10	12	20	8
7	Відстані між об'єктів δi	8	9	6	12	13	14	10	14	12	10	8	9	10	14	8
	Пропускна здатність ділянок Xi	4	6	8	17	19	21	13	21	17	13	9	11	13	21	9
8	Відстані між об'єктів δi	4	5	2	8	9	10	6	10	8	6	4	5	6	10	4
	Пропускна здатність ділянок Xi	3	8	7	18	21	24	12	24	18	12	6	9	12	24	6

Приклад виконання завдань засобами Mathcad.

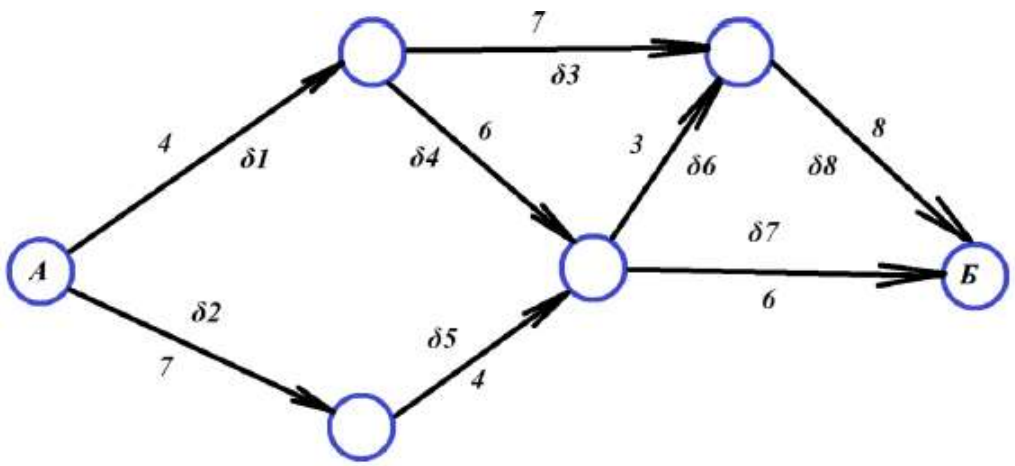


Рисунок 4.2 – Приклад транспортної мережі з відстанями між об’єктами

Лістинг програми в в Mathcad для визначення найкоротшого шляху в транспортній мережі.

ORIGIN := 1

Цільова функція:

$f(\delta) := 4\delta_1 + 7\cdot\delta_2 + 7\cdot\delta_3 + 6\cdot\delta_4 + 4\cdot\delta_5 + 3\cdot\delta_6 + 6\cdot\delta_7 + 8\cdot\delta_8$

$\delta_1 := 1 \quad \delta_2 := 1 \quad \delta 3 := 1 \quad \delta_4 := 1 \quad \delta_5 := 1 \quad \delta_6 := 1 \quad \delta_7 := 1 \quad \delta_8 := 1$

Given

$\delta_1 \geq 0 \quad \delta_2 \geq 0 \quad \delta_3 \geq 0 \quad \delta_4 \geq 0 \quad \delta_5 \geq 0 \quad \delta_6 \geq 0 \quad \delta_7 \geq 0 \quad \delta_8 \geq 0$

$\delta_1 + \delta_2 = 1 \quad \delta_1 = \delta_3 + \delta_4 \quad \delta_2 = \delta_5 \quad \delta_4 + \delta_5 = \delta_6 + \delta_7$

$\delta_3 + \delta_6 = \delta_8 \quad \delta_7 + \delta_8 = 1$

Визначаємо найкоротший шлях від пункту А до пункту Б:

$P := \text{Minimize}(f, \delta)$

$P^T = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$

Найкоротший шлях від пункту А до пункту Б становлять ребра:

$\delta_1, \delta_4, \delta_7$

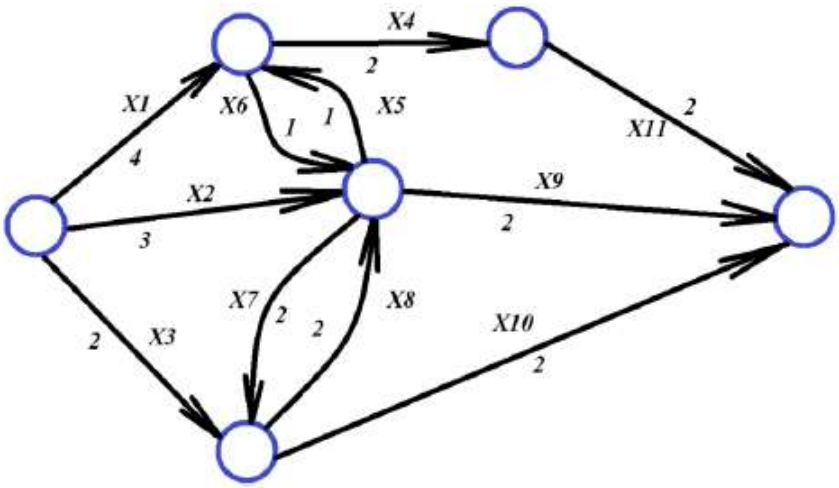


Рисунок 4.3 – Приклад транспортної мережі з максимальною пропускною здатністю ділянок

Лістинг програми в Mathcad для пошуку максимального потоку для транспортної мережі.

ORIGIN := 1

Цільова функція: $f(x) := x_9 + x_{10} + x_{11}$

$i := 1..11$

$x_i := 1$

Given

$0 \le x_1 \le 4 \quad 0 \le x_2 \le 3 \quad 0 \le x_3 \le 2 \quad 0 \le x_4 \le 2 \quad 0 \le x_5 \le 1$

$0 \le x_6 \le 1 \quad 0 \le x_7 \le 2 \quad 0 \le x_8 \le 2 \quad 0 \le x_9 \le 2 \quad 0 \le x_{10} \le 2$

$0 \le x_{11} \le 5$

$x_1 + x_5 = x_4 + x_6 \quad x_2 + x_6 + x_8 = x_5 + x_7 + x_9 \quad x_4 = x_{11}$

$x_3 + x_7 = x_8 + x_{10}$

Potik := Maximize(f ,x)

f(Potik) = 6

$Potik^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	...

-ребро мережі
-потік

Запитання для самоперевірки

1. Поняття сіткової моделі та її основні елементи.

2. Визначте основні правила побудови сіткових графіків.

3. Надайте визначення шляху та критичного шляху.

4. Яким чином здійснюється розрахунок тимчасових параметрів сіткових графіків?

5. Визначте алгоритм пошуку максимального потоку в сітках. Поясніть кожен етап.

5 ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕРЕЖ ПЕТРІ

Мета: Отримати практичні навички аналітичного моделювання під час визначення основних можливостей мереж Петрі.

Завдання.

1. Визначити результат запуску послідовності переходів T3-T2-T1-T2 та скласти матриці входів і виходів для мережі Петрі (рис. 5.1). Виконати побудову дерева досяжності для даної мережі та дослідити її основні властивості.

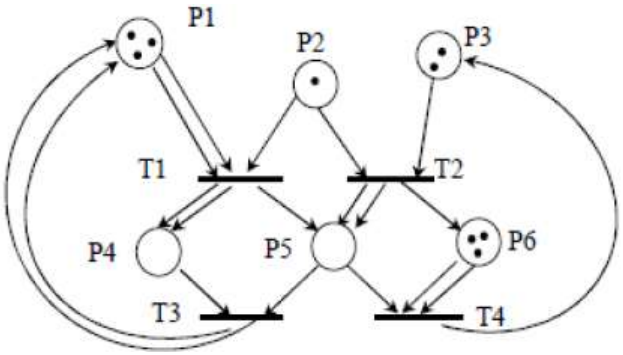


Рисунок 5.1 – Мережа Петрі до завдання 1

2. Скласти формалізовану модель системи на основі мереж Петрі: завдання поступають на обладнання у середньому одна машина у час. Розподіл величини інтервалу між ними експоненціальний. При нормальному режимі роботи завдання виконуються в порядку їхнього надходження. Час виконання завдання нормально розподілений з математичним сподіванням 0,5 години і середньоквадратичним відхиленням 0,1 година. Перед виконанням завдання відбувається наладка обладнання, час здійснення якої розподілений рівномірно на інтервалі від 0,2 до 0,5 години. Завдання, які виконані на обладнанні, направляються в інші відділи цеху. Електрична машина страждає від пошкоджень, при яких він не може продовжувати виконання завдання. Інтервали між поломками розподілені нормально з математичним сподіванням 20 годин і

середньоквадратичним відхиленням 2 години. При пошкодженні виконуване завдання виймається з обладнання і поміщається в початок черги завдань до нього. Виконання завдання відновляється з того місця, на якому воно було перервано. Коли електрична машина ламається, починається процес усунення пошкодження, що складається із трьох фаз. Тривалість кожної фази має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням, рівним 3/4 години. Оскільки загальна тривалість усунення пошкодження є сумою незалежних випадкових величин, що мають експоненціальний закон розподілу з однаковими параметрами, можна вважати, що ця випадкова величина розподілена за законом Ерланга. Дослідити властивості отриманої мережі Петрі матричним методом та скласти матриці входів і виходів. Побудувати дерево досяжності для розробленої мережі Петрі. Визначити досяжність маркування, що відповідає стану системи при працюючому та при зламаному обладнанні.

Запитання для самоперевірки

1. Надайте визначення мережі Петрі та визначте, з яких елементів вона складається?

2. Визначте основні умови запуску переходів та поясніть їх. Яким чином виконується запуск переходу?

3. Визначте яким чином складаються матриці входів, виходів та змінювань?

4. Перерахуйте основні властивості мереж Петрі та дайте пояснення.

5. Яким чином виконується дослідження збереженості мереж Петрі?

6. Яким чином виконується дослідження досяжності мереж Петрі?

7. Що собою представляє дерево досяжності мережі Петрі?

8. Поясніть, які обмеження є при застосуванні дерева досяжності при дослідженні мереж Петрі?

9. Яким чином здійснюється дослідження досяжності маркірування мережі Петрі?

10. Яким чином визначити рівень активності переходу мережі Петрі?

6 СКЛАДАННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕРЕЖІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ІМІТАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

Мета: Отримати практичні навички імітаційного моделювання під час дослідження алгоритму мережі масового обслуговування.

Завдання.

1. Виконати дослідження мережі масового обслуговування (рис. 6.1) із застосуванням імітаційних методів моделювання. Відомо, що показники ефективності мережі є ймовірність відмови в обслуговуванні, середні довжини черг в накопичувачах та середній час очікування в чергах. Розробити алгоритм реалізації мережі масового обслуговування за допомогою обраної на ваш розсуд мови програмування (C++/C#, Java, PHP, Python) та виконати його дослідження за наступних умов:

а) вхідних значень параметрів λ, μ, l;

б) зміненому в декілька раз параметрі λ;

в) зміненому в декілька раз параметрі μ;

г) зміненому в декілька раз параметрі l;

д) збільшеному в два рази часу моделювання;

Надати результати досліджень та виконати їх порівняння.

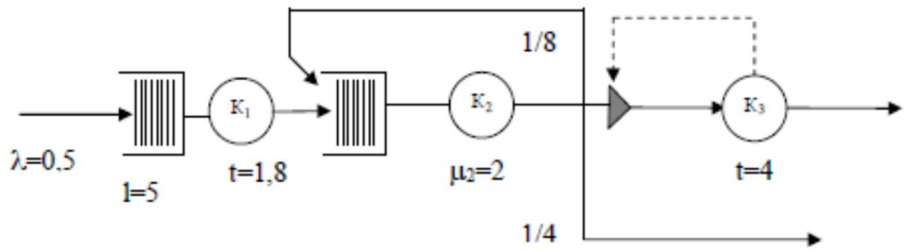


Рисунок 6.1 – Мережа масового обслуговування

Запитання для самоперевірки

1. Надайте пояснення мережі масового обслуговування. Які властивості вона має?

2. Які способи формалізації мереж масового обслуговування? Надайте їх характеристику.

3. Визначте з яких основних елементів система масового обслуговування складається?

4. Які параметри застосовують в мережі масового обслуговування?

5. Для яких системи необхідна формалізації засобами мереж масового обслуговування?

6. При яких умовах застосовуються тільки імітаційні методи реалізації системи масового обслуговування?

7. Визначте етапи створення алгоритму імітації процесів функціонування дискретних систем?

8. Які способи створення алгоритму просування стану дискретних моделей в залежності від часу існують?

9. Надайте пояснення об’єктно-орієнтованого підходу до побудови алгоритму імітації мережі масового обслуговування.

7 СКЛАДАННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕРЕЖІ ПЕТРІ ІМІТАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

Мета: Отримати практичні навички імітаційного моделювання під час дослідження алгоритму мережі Петрі.

Завдання.

1. У відповідності до схеми мережі масового обслуговування (рис. 6.1) з завдання №6 розробити мережу Петрі. Виконати складання та реалізацію алгоритму імітації отриманої мережі за допомогою обраної на ваш розсуд мови програмування (C++/C#, Java, PHP, Python) та перевірити її за умови зміни вхідних параметрів моделі. За результатами отриманих вихідних характеристик здійснити порівняльний аналіз за умови використання різноманітних способів формалізації мережі Петрі.

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть елементи імітаційної моделі мережі Петрі.

2. Які способи формалізації мереж Петрі існують? Надайте їх характеристику.

3. Яким чином зазначаються матриці входів і виходів в імітаційній моделі мережі Петрі?

4. Яким чином перевіряється умова запуску j-переходу мережі Петрі?

5. За допомогою якої змінної виконується опис стану мережі Петрі?

6. Надайте алгоритм дій реалізації переходу мережі Петрі з часовою затримкою?

7. Проаналізуйте відмінності реалізації багатоканального переходу мережі Петрі від одно канального?

8. Надайте алгоритм імітації простої мережі Петрі, з конфліктними та багатоканальними переходами?

9. Яким чином виконується реалізація неявного пріоритету запуску конфліктних переходів мережі Петрі?

8 ПЛАНУВАННЯ ТА ПРОВЕДЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ЗА ДОПОМОГОЮ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

Мета: Отримати практичні навички в плануванні та проведенні експериментів на основі імітаційної моделі.

Завдання.

1. Визначити розмір вибірки відгуку імітаційної моделі, що потрібний для забезпечення точності 3 за умови довірчої ймовірності 0,95. Закон розподілу відгуку імітаційної моделі є нормальним і його дисперсія дорівнює 126.

2. Визначити розмір вибірки відгуку імітаційної моделі, що потрібний для забезпечення точності 0,05 за умови довірчої ймовірності 0,95. Закон розподілу відгуку імітаційної моделі є невизначеним і його середньоквадратичне відхилення дорівнює 0,05.

3. Здійснити тактичне і стратегічне планування та виконати експеримент із застосуванням імітаційної моделі системи, яка реалізована в завданнях №6 або №7, на основі розробленого плану. За результатами виконати побудову регресійного рівняння відгуку імітаційної моделі. Характер відгуку моделі та план експерименту наводяться в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані для завдання

Варіант	Характер відгуку	План експерименту
1	Вірогідність відмови	Повний факторний експеримент
2	Середня довжина черги	Дробовий факторний експеримент
3	Середній час очікування	Повний факторний експеримент
4	Вірогідність відмови	Дробовий факторний експеримент
5	Середня довжина черги	Повний факторний експеримент
6	Середній час очікування	Дробовий факторний експеримент

Запитання для самоперевірки

1. Яким чином здійснюється визначення структури експерименту?

2. Що собою представляють якісні і кількісні фактори?

3. Наведіть основні задачі тактичного та стратегічного планування експерименту?

4. Яким чином можна побудувати план повного факторного експерименту у випадку наявності якісних факторів?

5. Яким чином можна побудувати план повного факторного експерименту у випадку наявності кількісних факторів?

6. Яким чином можна розробити план дробового факторного експерименту?

7. Наведіть алгоритм проведення дисперсійного аналізу результатів факторного експерименту.

8. Яким чином здійснюється складання регресійного рівняння відгуку моделі?

9. Наведіть алгоритм проведення регресійного аналізу результатів факторного експерименту.

10. Дайте визначення відтвореності експерименту?

11. Надайте алгоритм оцінки значущості коефіцієнту регресії?

12. Визначте критерії оцінки адекватності регресійного рівняння результатам експерименту?

13. Поясніть, які висновки щодо функціонування моделі можна зробити з регресійного рівняння її відгуку?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб / П.М. Павленко, С.Ф.Філоненко, О.М.Чередніков, В.В.Трейтяк. К.: НАУ, 2017. 392 с.

2. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навчальний посібник / А.І. Кузьмичов. К.: Видавництво Ліра-К, 2017. 215 с.

3. Моделювання та оптимізація систем: підручник / [В.М. Дубовой, Р.Н. Квєтний, О.І. Михальов, А.В. Усов]. Вінниця : ПП «ТД«Еднльвейс», 2017. 804 с.

4. Обод І.І. Математичне моделювання систем: навчальний посібник. / І.І. Обод, Г.Е. Заволодько, І.В. Свид; редак. І.І. Обода Харків: НТУ «ХПІ», Друкарня МАДРИД, 2019. 268 с.

5. Системний підхід і моделювання в наукових дослідженнях : підруч. / За заг. ред. Бутка М. П. [М. П. Бутко, І. М. Бутко, М. Ю. Дітковська та ін.] К. : «Центр учбової літератури», 2014. 360 с.

6. Виклюк, Я.І. Моделювання складних систем : навч. посіб. / Я.І. Виклюк, Р.М. Камінський, В.В. Пасічник; ред. В.В. Пасічник. Львів : Новий Світ-2000, 2019. 404 с. Серія: "Комп'ютинг"

7. Математичні методи оброблення та моделювання результатів експериментальних досліджень / М.Ю. Антомонов, Г.В. Коробейніков, І.В. Хмельницька, Н.В. Харковлюк-Балакіна . К.: Олімпійська література, 2021. 216 с.

8. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі: підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. 440 с.

9. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі : вибрані завдання для тематичного контролю: навч. посіб. / В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко, О.Ю. Вінничук, Л.В. Скращук. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. 2022. – 168 с.